



Marcel Filoche et Pierre Brun

Éléments de physique quantique et de relativité

Marcel Filoche et Pierre Brun, *Éléments de physique quantique et de relativité*, Presses des Mines, collection Les cours, 2025.

© Presses des MINES - TRANSVALOR, 2025
60, boulevard Saint-Michel - 75272 Paris Cedex 06 - France
presses@minesparis.psl.eu
www.pressesdesmines.com

© Illustration de couverture : *Le chat de Schrödinger, sagement assis sur sa fonction d'onde*. Image générée par un modèle d'IA OpenAI, (CC0).

ISBN : 978-2-38542-658-3

Dépôt légal : 2025
Achevé d'imprimer en 2025 (Paris)

Cette publication a bénéficié du soutien de l'Institut Carnot M.I.N.E.S.
Tous droits de reproduction, de traduction, d'adaptation et d'exécution réservés pour tous les pays.

Éléments de physique quantique et de relativité

Collection Les cours

Dans la même collection

Silvère Bonnabel et Michel Schmitt, *Cours de probabilités*.

Samuel Forest, *Mécanique des milieux continus. Volume 1 : Théorie, Volume 2 : Pratique*.

Pascal Debu, *Particules et noyaux*.

Pierre Brun, *Introduction à la relativité*.

Cong Toan Tran et Philippe Rivière, *Thermodynamic Energy System Modelling*.

Chantal de Fouquet, *Exercices corrigés de géostatistique*.

Renaud Gicquel, *Modéliser et simuler les technologies énergétique*.

Pascal Debu, *Noyaux et radioactivité*.

Ali Azarian et Yann Pollet, *Analyse fonctionnelle des systèmes*.

Francis Maisonneuve, *Mathématiques 2 et 3 Exercices*.

Bernard Wiesenfeld, *Une introduction à la neutronique*.

Francis Maisonneuve, *Probabilités. Mathématiques 3. Mathématiques 2. Mathématiques 1.*

Renaud Gicquel, *Introduction aux problèmes énergétiques globaux*.

Francis Maisonneuve, *Mathématiques 3*.

Francis Maisonneuve, *Mathématiques 1*.

J. Adnot, D. Marchio, Ph. Rivière, *Cycles de vie des systèmes énergétiques*.

Brigitte d'Andréa-Novel, Benoît Fabre, Pierre Jouvelot, *Acoustique-Informatique-Musique*.

Jean-Claude Moisdon, Michel Nakhla, *Recherche opérationnelle*.

Anne-Françoise Gourgues-Lorenzen, Jean-Marc Haudin, Jacques Besson, *Matériaux pour l'ingénieur*.

Renaud Gicquel, *Systèmes énergétiques T. 3. Systèmes énergétiques T. 2. Systèmes énergétiques T. 1.*

Thierry Weil, *Stratégie d'entreprise*.

François Cauneau, *Mécanique des fluides*.

Pierre Chauvet, *Aide-mémoire de géostatistique linéaire*.

Dominique Marchio, Paul Reboux, *Introduction aux transferts thermiques*.

François Engel, Frédéric Kletz, *Cours de comptabilité analytique*.

François Engel, Frédéric Kletz, *Cours de comptabilité générale*.

Jacques Bouchard, Jean-Paul Deffain, *Introduction au génie atomique*.

Daniel Fargue, *Abrégé de thermodynamique : principes et applications*.

Georges Pierron, *Introduction au traitement de l'énergie électrique*.

Bernard Degrange, *Introduction à la physique quantique*.

Michel Cohen de Lara, Brigitte d'Andréa-Novel, *Cours d'automatique*.

Fixari Daniel, *Les Imperfections des marchés*.

Jacques Lévy, *Introduction à la métallurgie générale*.

Hugues Molet, *Comment maîtriser sa productivité industrielle?*

Margaret Armstrong, Jacques Carignan, *Géostatistique linéaire*.

Marcel Filoche et Pierre Brun

Éléments de physique quantique et de relativité



| PSL 

PRESSES **DES MINES**
L'excellence scientifique

Table des matières

Avant-propos	15
1 Formulations lagrangienne et hamiltonienne de la mécanique	17
1.1 Le monde selon Galilée et Newton	17
1.1.1 Vision classique de l'espace et du temps	17
1.1.2 Espace des phases et déterminisme classique	18
1.2 Le principe de moindre action	18
1.2.1 Première approche variationnelle : le principe de Fermat	19
1.2.2 Le principe de moindre action de Maupertuis	21
1.2.3 Le formalisme lagrangien	22
1.2.4 Les équations d'Euler-Lagrange	23
1.2.5 Équivalence avec la mécanique newtonienne	24
1.2.6 Particule dans un champ électromagnétique	24
1.2.7 Le moment conjugué de Lagrange	26
1.3 Invariances et conservations	27
1.3.1 Translation dans le temps et énergie	27
1.3.2 Translations dans l'espace et impulsion	28
1.3.3 Rotations dans l'espace et moment cinétique	29
1.3.4 Théorème de Noether classique	29
1.4 Formulation hamiltonienne de la physique	30
1.4.1 Énergie et hamiltonien	30
1.4.2 Les équations de Hamilton-Jacobi	32
1.4.3 Évolution temporelle et crochets de Poisson	33
1.4.4 Le théorème de Liouville	34
1.5 Le cas des systèmes non conservatifs	36
1.6 Notations en coordonnées généralisées	37
1.7 Le champ électromagnétique	38
1.7.1 Équations de Maxwell et équations du mouvement . . .	38
1.7.2 Potentiels, invariance de jauge et conservation de la charge	39
1.7.3 Énergie du champ électromagnétique	41
1.7.4 La catastrophe ultraviolette	44
À retenir de ce chapitre	46

2 Premiers pas en relativité restreinte	47
2.1 Incohérences de la physique classique	47
2.1.1 Expériences de pensée en magnétisme	47
2.1.2 Équation de d'Alembert et transformations de Galilée .	49
2.1.3 Introduction de l'éther comme milieu de propagation .	50
2.1.4 Les expériences de Fizeau	50
2.1.5 L'expérience de Michelson et Morley	52
2.2 La perte de la notion de temps absolu	55
2.2.1 Les relativités de Galilée d'Einstein	55
2.2.2 Relativité du temps	55
2.2.3 Relativité de la simultanéité	58
2.3 Diagrammes d'espace-temps	59
2.3.1 Représentation des événements	59
2.3.2 Transformations de Galilée et de Lorentz	60
2.3.3 Causalité et c comme vitesse limite	61
2.3.4 Cônes de lumière	63
2.4 L'invariant relativiste	64
2.5 Les transformations de Lorentz	66
2.5.1 Retour sur la propagation des ondes	66
2.5.2 Rapidité et composition des vitesses	68
2.6 L'espace-temps de Minkowski	69
2.6.1 Les quadrivecteurs	69
2.6.2 Produit scalaire et pseudo-norme de Minkowski	70
2.6.3 Classification des intervalles spatio-temporels	71
2.6.4 Le temps propre	72
2.6.5 Précautions relatives aux notations	72
2.6.6 Invariance du produit scalaire et de la pseudo-norme .	73
2.6.7 Le groupe de Poincaré	73
2.7 Retour sur l'expérience de Fizeau	74
2.8 Effets de perspective relativiste	74
2.8.1 La dilatation des temps	74
2.8.2 La contraction des longueurs	77
2.8.3 L'effet Doppler relativiste	78
2.9 Paradoxes apparents de la relativité restreinte	79
2.9.1 Le train et le hangar	80
2.9.2 Les vaisseaux spatiaux de Bell	81
2.9.3 Les jumeaux de Langevin	82
À retenir de ce chapitre	84

3	Le formalisme hamiltonien et la relativité	85
3.1	Le principe de moindre action relativiste	85
3.1.1	Leçon du paradoxe des jumeaux	85
3.1.2	Lagrangien relativiste pour la particule libre	87
3.1.3	Une version relativiste de la seconde loi de Newton . . .	88
3.2	L'énergie relativiste	89
3.2.1	La masse des particules	90
3.2.2	Les réactions nucléaires	91
3.2.3	La durée de vie du muon et la dilatation du temps . . .	93
3.3	Système de particules	94
3.3.1	Invariance et conservation	94
3.3.2	Exemple : la diffusion Compton	95
3.4	Quadrivecteurs et électromagnétisme	96
3.4.1	Force de Lorentz	96
3.4.2	Transformation du champ électromagnétique	98
3.4.3	Formulation covariante de l'électromagnétisme	98
3.5	Retour sur la formulation lagrangienne	102
3.5.1	Lagrangien d'une particule chargée dans un champ . . .	102
3.5.2	Lagrangien du champ électromagnétique	103
3.6	Relativité générale	104
	À retenir de ce chapitre	106
4	La nature quantique de la matière et de la lumière	107
4.1	Les problèmes de l'interaction lumière-matière	107
4.1.1	Les raies de l'hydrogène : la formule de Rydberg	108
4.1.2	L'effet photoélectrique	109
4.1.3	Le rayonnement du corps noir	109
4.2	La formule de Planck	111
4.3	La découverte de l'atome	113
4.3.1	L'expérience de Rutherford	113
4.3.2	La stabilité de la matière	114
4.3.3	L'atome de Bohr	116
4.4	Onde ou corpuscule ?	119
4.5	L'expérience des fentes d'Young	121
4.5.1	Principe de l'expérience	121
4.5.2	Peut-on savoir par quelle fente passe la particule ? . . .	123
4.6	Les nouvelles échelles de la physique	125
	À retenir de ce chapitre	127
5	La formalisation de la physique quantique	129
5.1	La fonction d'onde	129
5.1.1	Amplitude et densité de probabilité	129
5.1.2	Le principe de superposition	131

5.2	Mesures aléatoires et valeurs moyennes	131
5.2.1	La loi de probabilité de présence	131
5.2.2	La loi de probabilité en impulsion	133
5.2.3	Construire la loi de probabilité d'une quantité mesurable	137
5.2.4	L'exemple de l'opérateur « énergie cinétique »	139
5.2.5	L'hamiltonien quantique	139
5.3	Mesures exactes et lois de probabilités	140
5.3.1	Mesure certaine	140
5.3.2	La mesure quantique	141
5.4	L'incertitude en physique quantique	144
5.4.1	La cohérence de la mesure	144
5.4.2	Commutation et compatibilité des mesures	145
5.4.3	Le principe d'incertitude d'Heisenberg	146
5.4.4	Le cas particulier position-impulsion	147
5.4.5	Lien avec la transformation de Fourier	149
5.4.6	Lien avec l'expérience des fentes d'Young	149
5.5	Ensembles complets d'observables compatibles (ECOC)	151
5.6	Le caractère algébrique de la physique quantique	152
5.6.1	Les représentations	152
5.6.2	La notation de Dirac	152
5.6.3	États propres de la position et de l'impulsion	153
5.7	Les postulats de la physique quantique	155
5.8	Systèmes à plusieurs particules	156
5.9	Invariance et conservation en physique quantique	158
5.9.1	Le théorème de Noether quantique	159
5.9.2	La symétrie de translation	160
	À retenir de ce chapitre	162

6 L'évolution quantique 165

6.1	L'équation de Schrödinger	165
6.1.1	Évolution de la particule libre	165
6.1.2	Particule dans un champ de potentiel	167
6.2	Les états stationnaires	168
6.2.1	L'équilibre quantique	168
6.2.2	L'évolution d'un état quelconque	170
6.3	L'évolution d'une observable	171
6.3.1	Dans un état stationnaire	171
6.3.2	Dans un état quelconque	171
6.4	Les équations d'Ehrenfest	172
6.5	Principe d'incertitude temps-énergie	174
6.6	L'intégrale de chemin de Feynman	175
6.7	L'équation de Schrödinger, une limite non-relativiste	177
6.7.1	L'équation de Klein-Gordon	177

6.7.2	L'équation de Schrödinger comme limite classique . . .	178
6.8	Transformations de jauge et phase de la fonction d'onde . . .	179
	À retenir de ce chapitre	182
7	L'oscillateur harmonique	183
7.1	Importance de l'oscillateur harmonique	183
7.2	Rappels de la situation classique	185
7.3	Adimensionnement des opérateurs	186
7.4	Opérateurs de saut et relations de commutation	186
7.5	États propres de l'opérateur $\hat{N}$	187
7.6	Spectre de l'opérateur $\hat{N}$ et énergies propres du système	189
7.7	Les états propres de l'oscillateur quantique	190
7.7.1	Description de l'état fondamental	190
7.7.2	Absence de dégénérescence des états propres	192
7.7.3	Résolution générale en représentation « x », polynômes d'Hermite	192
7.8	Relations d'Heisenberg	194
7.9	Le rayonnement thermique et l'hypothèse de Planck	195
7.10	Divergences quantiques et renormalisation	196
7.11	La limite classique de l'oscillateur harmonique quantique	198
	À retenir de ce chapitre	199
8	Le moment cinétique	201
8.1	Comment résoudre l'atome d'hydrogène ?	201
8.2	Le moment cinétique classique	202
8.3	Mesure du moment cinétique des atomes et magnétisme	204
8.3.1	Rapport gyromagnétique	204
8.3.2	Évolution d'un moment magnétique dans un champ . .	205
8.3.3	Le magnétisme de la matière	207
8.4	Définition du moment cinétique quantique	208
8.5	Lien avec l'invariance par rotation	209
8.6	Valeurs propres du moment cinétique quantique	212
8.7	Le moment cinétique orbital	214
8.8	Les harmoniques sphériques	217
	À retenir de ce chapitre	219
9	Le moment cinétique intrinsèque : le spin	221
9.1	Influence des champs magnétiques sur la lumière	221
9.1.1	L'effet Zeeman normal dans le modèle de Bohr	222
9.1.2	L'effet Zeeman anomal	223
9.2	L'expérience de Stern-Gerlach	225
9.3	Opérateurs de spin	227
9.4	Les matrices de Pauli	228

9.5	Représentation à deux dimensions du groupe des rotations . . .	229
9.6	La mesure du spin	230
9.7	L'équation de Dirac ou l'origine relativiste du spin	231
9.8	Bosons et fermions : le théorème spin-statistique	233
9.8.1	Systèmes de bosons et de fermions à deux particules . .	235
9.8.2	Le principe d'exclusion de Pauli	236
	À retenir de ce chapitre	238
10	L'atome d'hydrogène	239
10.1	De deux particules à une particule : la masse réduite	239
10.2	La stabilité de l'atome	241
10.3	L'équation radiale	242
10.4	Le spectre de l'hydrogène et les orbitales atomiques	245
10.4.1	Le spectre de l'hydrogène	245
10.4.2	L'état fondamental de l'atome d'hydrogène	246
10.5	L'atome à Z électrons	247
10.5.1	L'état fondamental de l'atome à Z électrons	250
10.5.2	L'énergie d'ionisation des atomes	251
	À retenir de ce chapitre	253
11	L'intrication quantique	255
11.1	Système à plusieurs particules et intrication	255
11.2	Le paradoxe EPR	257
11.3	Réalisme, causalité, localité et séparabilité	259
11.4	Les inégalités de Bell	261
11.5	Les expériences d'Aspect-Dalibard-Grangier-Roger	263
11.6	Le chat de Schrödinger et la décohérence	265
11.7	La mécanique quantique et l'intrication en application	267
11.7.1	La cryptographie quantique	267
11.7.2	La métrologie	268
11.7.3	L'informatique quantique	269
	À retenir de ce chapitre	270
12	Conclusions, la physique moderne	273
	Annexes mathématiques	275
A	Énergie moyenne des oscillateurs classiques et quantiques . . .	275
A.1	Calcul classique	275
A.2	Calcul « à la Max Planck »	276
A.3	Calcul quantique	277
B	Transformation de changement de repère conservant l'intervalle relativiste	277
C	Probabilités continues	279

	C.1	Fonction caractéristique	279
	C.2	Le théorème de la limite centrale	281
D		Espaces de Hilbert et produits hermitiens	282
	D.1	Opérateurs et opérateurs hermitiens	283
	D.2	Application à la physique quantique	285
E		Transformée de Fourier	285
	E.1	Définition et propriétés	285
	E.2	Inégalités d’Heisenberg	286
F		Distributions	287

Avant-propos

Au tournant du XX^{e} siècle, la physique a connu l'un des plus grands bouleversements de toute son histoire. Alors même qu'après plus de deux cents ans de tâtonnements, de découvertes en découvertes, on semblait enfin atteindre une connaissance exhaustive et complète des constituants de la nature, de leurs propriétés et des lois gouvernant leur évolution, les quelques fissures ou imperfections que comportait ce splendide édifice théorique se sont révélées progressivement des failles majeures. Remonter à l'origine de ces incohérences et en tirer les conséquences a nécessité de remettre en cause des notions qui semblaient intouchables : le caractère absolu du temps, le déterminisme, la localité, la nature des interactions, jusqu'au réalisme même des objets. Cette révolution a donné naissance à la physique moderne, unifiant la nature des objets qui la composent en ce qui allaient devenir des particules quantiques, puis des champs quantiques.

L'objectif de cet ouvrage est de guider le lecteur à travers cette révolution, le long des deux axes majeurs qu'ont constitué la relativité et la physique quantique. Le point de départ et le cœur théorique de ces développements est le principe de moindre action, qui débute cet ouvrage, décrit dans le formalisme lagrangien et hamiltonien.

Chapitre 1

Formulations lagrangienne et hamiltonienne de la mécanique

1.1 Le monde selon Galilée et Newton

1.1.1 Vision classique de l'espace et du temps

C'est à Galilée que nous devons notre vision classique de la description du mouvement. Dès 1610, il remarque qu'il est impossible de différencier le repos d'un mouvement rectiligne et uniforme. Ceci signifie qu'en l'absence de force, le mouvement d'un point matériel est continu et uniforme. Aucune expérience locale ne permettant de différencier un état de repos d'un état de mouvement rectiligne et uniforme, il en conclut que ces deux situations sont fondamentalement identiques. Cette observation est connue sous le nom de *principe d'inertie*.

Ce principe trouve sa traduction mathématique dans l'espace euclidien. Dans l'espace et le temps, tout événement ponctuel peut être considéré comme déterminé par ses coordonnées spatiales, regroupées en un vecteur à trois dimensions $\vec{r}$, et par sa coordonnée temporelle t . On peut également rassembler ces coordonnées sous la forme d'une position à quatre composantes $(\vec{r}, t)$. Dans cette représentation, le temps est absolu et identique dans tous les référentiels inertiels ou *galiléens* (à la définition de l'origine des temps près).

Dans ce cadre les changements de référentiels sont décrits par les transformations de Galilée. La transformation qui permet de passer des coordonnées $\vec{r}$ dans un repère $\mathcal{R}$ aux coordonnées $\vec{r}'$ dans un repère $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{u}$ par rapport à $\mathcal{R}$ s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u} t \\ t' = t \end{cases} \quad (1.1)$$

où l'on suppose que les origines des temps sont identiques dans les deux repères. L'évolution d'un système classique est décrite par la mécanique newtonienne qui relie la variation temporelle des vitesses aux forces extérieures qui sont appliquées au système. Pour un système de N points matériels de masses $\{m_i\}$, cette relation est donnée par la seconde loi de Newton :

$$m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) \quad . \quad (1.2)$$

L'évolution du système à partir de conditions initiales données est ainsi entièrement déterminée par la donnée des positions et des vitesses à un instant t , ou par celle des positions en deux instants différents.

1.1.2 Espace des phases et déterminisme classique

La dépendance fondamentale envers les données initiales $(\vec{r}, \vec{v})$ conduit de manière très naturelle à décrire l'évolution des systèmes dans un espace multidimensionnel dans lequel chaque point est caractérisé par les valeurs des positions et des vitesses. Cet espace est nommé *espace des phases*. Pour une particule évoluant dans un espace à trois dimensions, l'espace des phases en comporte donc six. Plus généralement, l'espace des phases d'un système de N particules évoluant dans notre espace usuel tridimensionnel comporte $6N$ dimensions. La partie gauche de la figure 1.1 présente ainsi la trajectoire générale dans l'espace des phases d'une particule évoluant le long d'un axe Ox , la coordonnée verticale correspondant à la vitesse linéaire $\dot{x}$ de la particule. Sur la même figure à droite est représentée la trajectoire dans l'espace des phases d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. Cette trajectoire est une orbite fermée parcourue de façon périodique. Conformément à la physique newtonienne, les données des valeurs de $(\vec{r}, \vec{v})$ à un instant t donné déterminent entièrement l'évolution du système pour tous les instants futurs $t' > t$.

1.2 Le principe de moindre action

Nous avons vu dans la section précédente que, pour décrire le mouvement d'un ensemble de points matériels, il est équivalent de donner, soit les valeurs des positions et des vitesses à un instant, soit uniquement les positions mais à deux instants différents. Cette observation nous invite à considérer le mouvement sous un nouvel angle. Plutôt que de partir d'une situation initiale complètement déterminée (positions et vitesses), on peut se poser la question suivante : si l'on se donne une position initiale et une position finale, existe-t-il une évolution (une trajectoire dans l'espace des phases) qui les relie, et si oui, quelle est-elle ? Nous allons voir que la réponse à cette question réside dans le principe

de moindre action, principe qui va bouleverser la vision de la mécanique et ultérieurement, de la physique.

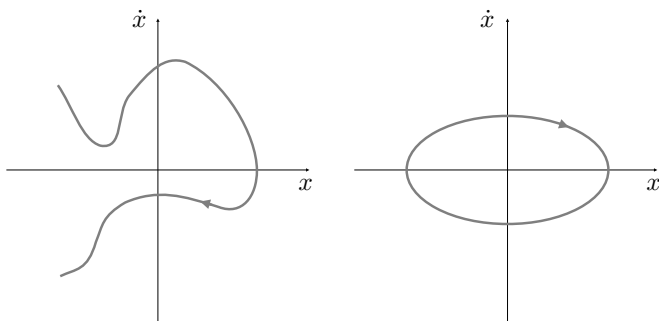


FIGURE 1.1 – Exemples d'évolution dans l'espace des phases pour une particule à une dimension : évolution quelconque (à gauche) et oscillateur harmonique (à droite).

1.2.1 Première approche variationnelle : le principe de Fermat

Historiquement, c'est à Fermat que l'on doit le premier énoncé d'un principe de minimisation pour décrire l'évolution d'un système physique, en l'occurrence pour expliquer les lois de la réfraction lumineuse. Pour le comprendre, nous pouvons commencer par nous poser un problème en apparence sans rapport : supposons qu'Alice soit à proximité d'une piscine dans laquelle Bob se trouve en difficulté et appelle à l'aide. La question est de savoir quelle trajectoire Alice doit emprunter pour atteindre Bob le plus rapidement possible. Il s'agit d'une question non triviale, car Alice court plus vite sur le sol qu'elle ne nage. Se déplacer en ligne droite vers Bob n'est donc pas obligatoirement optimal, pas plus que courir sur le sol pour atteindre le bord de la piscine le plus proche de Bob, ce qui pourrait lui prendre au total trop de temps. La situation est schématisée sur le panneau de gauche de la figure 1.2.

En nommant I le point de passage entre le sol et l'eau, et en choisissant l'axe Ox le long du bord de la piscine (l'origine correspondant à la position initiale d'Alice), le temps total mis pour atteindre Bob est

$$\tau = \frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2} = \frac{\sqrt{x_I^2 + y_A^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_B - x_I)^2 + y_B^2}}{v_2} . \quad (1.3)$$

L'optimum de ce temps de parcours est obtenu en annulant sa dérivée par rapport à la position x_I :

$$\frac{d\tau}{dx_I} = 0 = \frac{1}{v_1} \frac{x_I}{\sqrt{x_I^2 + y_A^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{x_B - x_I}{\sqrt{(x_B - x_I)^2 + y_B^2}} . \quad (1.4)$$

Par ailleurs,

$$\frac{x_I}{\sqrt{x_I^2 + y_A^2}} = \frac{x_I}{AI} = \sin i_1 \quad \text{et} \quad \frac{x_B - x_I}{\sqrt{(x_B - x_I)^2 + y_B^2}} = \frac{x_B - x_I}{IB} = \sin i_2 . \quad (1.5)$$

Finalement, la trajectoire optimale effectivement empruntée par Alice satisfait la relation suivante :

$$\frac{1}{v_1} \sin i_1 = \frac{1}{v_2} \sin i_2 . \quad (1.6)$$

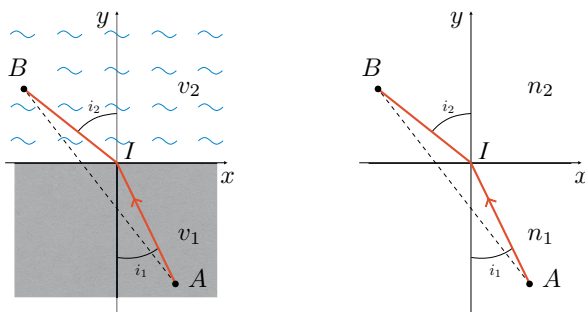


FIGURE 1.2 – Illustration du principe de Fermat : à gauche, pour qu’Alice (en A) sauve Bob (en B) de la noyade, et à droite, pour la réfraction de la lumière entre deux milieux d’indices différents.

De façon analogue, un rayon lumineux traversant une interface entre deux milieux d’indices différents est dévié. Sa trajectoire obéit précisément à la loi ci-dessus. Nous avons l’habitude de l’écrire en utilisant l’indice optique $n = c/v$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, et v dans le milieu. La loi obtenue, connue sous le nom de *loi de Snell-Descartes* et illustrée dans le panneau de droite de la figure 1.2, s’exprime comme suit :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 . \quad (1.7)$$

Étant donné les points de départ et d’arrivée A et B du rayon lumineux, la trajectoire effectivement suivie correspond au temps de trajet minimal entre A et B . Ce changement de point de vue est très important pour la description

de la physique. Il s'agit d'une révolution conceptuelle majeure, offrant une alternative globale aux méthodes procédurales établies précédemment. Pour la première fois, une loi physique, la loi de la réfraction lumineuse, est dérivée à partir d'un point de vue global et d'un principe variationnel, ici la minimisation du temps de parcours.

1.2.2 Le principe de moindre action de Maupertuis

Le principe de Fermat invite à chercher une approche variationnelle pour la mécanique. Ce sont Maupertuis, puis Euler qui appliquent en premier ce point de vue à la mécanique au XVIII^e siècle. S'inspirant des travaux de Fermat, Maupertuis va retrouver une loi des sinus pour la réfraction lumineuse en recherchant la trajectoire qui, entre deux instants t_1 et t_2 , minimise la quantité suivante :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} . \quad (1.8)$$

Il nomme cette quantité l'*action*. L'action totale est donc une somme d'actions élémentaires $\vec{v} \cdot d\vec{\ell}$ qui ne dépendent que de l'état instantané du système. Le *principe de moindre action* stipule que l'action est minimale pour la trajectoire réelle. Sur le schéma de la figure 1.3, la trajectoire réelle est représentée en trait plein. Toute trajectoire potentielle autre que la trajectoire réellement suivie débouche sur un accroissement $\delta S > 0$ de l'action.

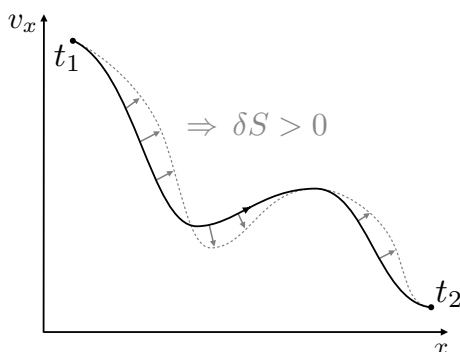


FIGURE 1.3 – Illustration de la trajectoire d'un système unidimensionnel dans l'espace des phases (x, v_x) . La trajectoire réelle est en trait plein, toute déviation entraîne une action globale plus élevée.

Généralisant son raisonnement aux systèmes matériels, Maupertuis introduit alors la masse dans l'expression de S . Dans la suite, nous verrons qu'il est effectivement plus naturel d'utiliser l'impulsion que la vitesse :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} m \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{p} \cdot d\vec{\ell} . \quad (1.9)$$

L'unité de l'action ainsi définie est donc le produit d'une énergie par un temps, et se mesure en $\text{J} \cdot \text{s}$ en unités S.I.

1.2.3 Le formalisme lagrangien

Le formalisme moderne permettant d'exprimer la mécanique classique d'un point de vue variationnel est introduit par Joseph-Louis Lagrange dans la seconde partie du XVIII^e siècle. Outre le fait qu'il permet de faire le lien avec la physique quantique, ce formalisme offre une vision synthétique permettant de s'affranchir des forces internes et de mettre en valeur les symétries du problème. Ces dernières vont en particulier faire émerger de façon naturelle les invariants, c'est-à-dire les constantes du mouvement.

L'action de Lagrange se construit comme une généralisation de l'exemple de la section précédente. S y est définie comme l'intégrale entre deux points fixes d'une fonction nommée lagrangien L , ce dernier ne dépendant que des positions des particules et de leurs dérivées premières :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L [\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t); \vec{v}_1(t), \dots, \vec{v}_N(t)] . \quad (1.10)$$

Il est important de noter que le lagrangien est construit comme une fonction des variables $\vec{r}_i$ et $\vec{v}_i$ considérées comme indépendantes, de sorte que la notion d'espace des phases prend tout son sens. Dans la pratique, cette indépendance se traduit par

$$\frac{\partial L(\vec{v})}{\partial \vec{r}} = \vec{0} \quad \text{si } L \text{ ne dépend que de } \vec{v}$$

et

$$\frac{\partial L(\vec{r})}{\partial \vec{v}} = \vec{0} \quad \text{si } L \text{ ne dépend que de } \vec{r} .$$

La notation utilisée ici est une notation compacte permettant de désigner un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport aux composantes du vecteur au dénominateur. Par exemple, dans une base orthonormée $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, la dérivée d'une grandeur scalaire A s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial A}{\partial u_x} \vec{e}_x + \frac{\partial A}{\partial u_y} \vec{e}_y + \frac{\partial A}{\partial u_z} \vec{e}_z .$$

Dans le cas de l'opérateur gradient, cela revient à l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial A}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla} A .$$

Dans la suite de l'ouvrage, la notation $\partial/\partial \vec{u}$ sera le plus souvent utilisée, à la place en particulier de l'opérateur $\vec{\nabla}$.

1.2.4 Les équations d'Euler-Lagrange

La définition de l'action à partir du lagrangien permet de trouver la forme générale des équations du mouvement sur la base du principe de moindre action. Supposons que l'on perturbe la trajectoire, en modifiant chaque variable $\vec{r}_i(t)$ et $\vec{v}_i(t)$ en $\vec{r}_i(t) + \delta \vec{r}_i(t)$ et $\vec{v}_i(t) + \delta \vec{v}_i(t)$. Il faut bien noter que, pour que cette trajectoire modifiée dans l'espace des phases corresponde effectivement à une trajectoire potentielle dans l'espace réel, il faut conserver la condition de cohérence :

$$\forall i, \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}_i(t)) = \delta \vec{v}_i(t) . \quad (1.11)$$

L'action est alors modifiée selon

$$S + \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt (L + \delta L)(t) , \quad (1.12)$$

avec :

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \delta \vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{i=1}^N \delta \vec{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} . \quad (1.13)$$

Si l'on considère la particule i , et que l'on intègre la perturbation de l'action sur toute la trajectoire dans l'espace engendré par $\{\vec{r}_i, \vec{v}_i\}$, il vient :

$$\delta S_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta \vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + \delta \vec{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) . \quad (1.14)$$

Le second terme peut être intégré par parties en utilisant (1.11) :

$$\delta S_i = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta \vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) + \left[\delta \vec{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta \vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) \right) . \quad (1.15)$$

Par ailleurs, le terme entre crochets est nul car les conditions en t_1 et t_2 sont fixées, ce qui entraîne

$$\delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_2) = \vec{0}, \quad \forall i . \quad (1.16)$$

Pour que l'action soit minimale, il faut que $\delta S_i = 0$, soit en regroupant les termes

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \delta \vec{r}_i \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) \right) = 0 . \quad (1.17)$$

Cette égalité doit être valable pour toute perturbation $\delta \vec{r}_i$. Ceci n'est possible que si le terme entre parenthèses s'annule, ce qui donne alors les *équations d'Euler-Lagrange* :

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) . \quad (1.18)$$

Ce sont en fait les équations du mouvement. Pour faire le lien avec leur forme habituelle, il faut préciser la valeur du lagrangien pour un système donné.

1.2.5 Équivalence avec la mécanique newtonienne

La deuxième loi de Newton (1.2) et l'équation d'Euler-Lagrange (1.18) sont supposées décrire toutes deux le mouvement d'un ensemble de points matériels. Voyons à quelle condition elles sont équivalentes. Dans le cas d'une seule particule soumise à une force dérivant d'un potentiel, on voit immédiatement qu'une condition suffisante est :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \\ \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} \end{cases} , \quad (1.19)$$

où U est le potentiel dont dérive la force. Il est facile de voir que le lagrangien suivant convient :

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - U(\vec{r}) , \quad (1.20)$$

soit de façon générale, la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U ,

$$L = T - U . \quad (1.21)$$

Nous disposons donc maintenant de deux points de vue équivalents. La formulation newtonienne propose une approche différentielle, où la trajectoire des points matériels peut être construite de proche en proche à partir de la donnée des positions et des vitesses à un instant donné. La formulation lagrangienne offre en revanche un point de vue global, une fois fixés l'état initial et l'état final.

1.2.6 Particule dans un champ électromagnétique

C'est peut-être dans le cas de l'étude d'une particule en mouvement dans un champ électromagnétique que l'approche lagrangienne se révèle la plus instructive. Considérons une particule de masse m et de charge q dans un champ

électromagnétique décrit par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. La force subie par la particule est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} . \quad (1.22)$$

On rappelle que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dérivent des potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$, les relations entre les champs et les potentiels étant données par

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \wedge \vec{A} . \quad (1.23)$$

La force électrique dérive uniquement du potentiel qV si le champ magnétique est indépendant du temps. Le cas de la force magnétique est moins trivial en raison du potentiel vecteur¹. La forme correcte du lagrangien décrivant le mouvement de la particule dans ces champs est

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - qV + q\vec{v} \cdot \vec{A} . \quad (1.24)$$

On peut le vérifier en considérant l'équation d'Euler-Lagrange (1.18) issue de ce lagrangien. Voyons la projection sur x , les cas des autres directions étant similaires. On a d'une part

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= q\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} - q \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \\ &= q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) v_x + q \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) v_y + q \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) v_z - q \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} , \end{aligned} \quad (1.25)$$

et par ailleurs,

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A} , \quad (1.26)$$

car V et $\vec{A}$ ne dépendent que de $\vec{r}$. On peut à présent dériver l'équation précédente par rapport au temps et utiliser l'équation d'Euler-Lagrange (1.18), ce qui donne selon la direction x

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= ma_x + q \frac{dA_x}{dt} \\ &= ma_x + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} v_y \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right) . \end{aligned} \quad (1.27)$$

En combinant l'expression précédente avec (1.25), il vient

$$\begin{aligned} ma_x &= q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) v_x + q \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) v_y + q \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) v_z - q \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \\ &\quad - \left[q \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} v_y \right) + q \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right) \right] . \end{aligned} \quad (1.28)$$

1. Cela est non sans lien avec les fameux coups francs de Roberto Carlos. La force exercée par l'air sur une sphère en rotation sur elle-même, conséquence de l'effet Magnus, peut aussi être décrite par un potentiel vectoriel.

En utilisant la définition des champs à partir des potentiels scalaire et vecteur (1.23), il vient

$$ma_x = qE_x + qB_zv_y - qB_yv_z = qE_x + q \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right)_x . \quad (1.29)$$

On reconnaît dans le membre de droite la composante selon x de la force de Lorentz (1.22). Les équations d'Euler-Lagrange sont donc bien équivalentes à la deuxième loi de Newton et conduisent aux bonnes équations du mouvement, à condition que le lagrangien soit donné par (1.24). Nous verrons dans la suite que cela correspond à une redéfinition de l'impulsion dans le cas où un champ électromagnétique est présent.

Dans les problèmes où intervient la force de Lorentz, il n'est pas possible de décrire le mouvement à l'aide d'un potentiel de façon aussi concise que dans le cas où seul un champ électrique statique est présent. La raison en est que le potentiel n'est pas décrit par une simple grandeur scalaire. Dans le premier cas, l'énergie potentielle électrostatique est donnée par le produit qV . En présence d'un champ magnétique, on peut interpréter le terme $q\vec{v} \cdot \vec{A}$ non comme une énergie potentielle mais, à une constante multiplicative près², une *impulsion potentielle*.

1.2.7 Le moment conjugué de Lagrange

L'introduction du lagrangien comme entité fondamentale décrivant l'évolution d'un système amène de façon naturelle à définir un *moment conjugué de Lagrange* qui généralise la notion de quantité de mouvement. Il est défini par

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} . \quad (1.30)$$

Cette grandeur est également appelée *impulsion*. Dans le cas d'une particule isolée ou soumise à un potentiel scalaire, l'impulsion s'identifie à la quantité de mouvement. Ce n'est plus le cas si l'on considère une particule dans un champ magnétique, comme on l'a vu dans la section précédente. Le tableau 1.1 donne les lagrangiens et les moments conjugués dans trois exemples courants de situations.

2. La constante en question a la dimension d'une vitesse. Ce point sera abordé dans le chapitre sur la relativité, avec le quadri-vecteur énergie-impulsion.